Lista 6 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2023

Notação: nesta lista usaremos a convenção do Wald para os símbolos de Christoffel e curvatura, isto é, $\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{ck} \left(\partial_a g_{bk} + \partial_b g_{ak} - \partial_k g_{ab}\right)$ e $\left(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a\right) \omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d$. Ainda, $R_{ac} = R_{abc}{}^b$ e $R = R_a{}^a$.

1. **(Universo estático de Einstein)** Considere um modelo de universo dominado por matéria não relativística ($p = 0$).

   (a) Encontre o valor da constante cosmológica que permite uma solução estática ($a(t)$ constante) das equações de Friedmann.

   (b) Mostre que esse universo é fechado e encontre seu volume e massa totais.

   (c) Esse universo é estável ou instável? (Dica: perturbe sua solução para ρ e a e analise como essas perturbações evoluem com o tempo).

2. (Schutz) Muitos sistemas físicos podem ser idealizados como coleções de partículas sem colisão (por exemplo, radiação de corpo negro, plasmas rarefeitos, galáxias e aglomerados globulares). Considere um tal sistema no espaço de Minkowski, tendo uma distribuição aleatória de velocidades em todos os pontos, sem direção privilegiada, em um dado referencial inercial. Mostre que o tensor de energia-momento correspondente é o de um fluido perfeito. Supondo que todas as partículas têm a mesma velocidade v e massa m, expresse a pressão p e a densidade ρ como funções de m, v e n (densidade de partículas). Mostre que um gás de fótons tem $p = \rho/3$. Generalize seu resultado para o contexto cosmológico.

3. Considere o modelo cosmológico com equação de estado $p = w\rho$. Em cada um dos itens abaixo, ache o fator de escala $a(t)$ e esboce seu gráfico. Faça isso em termos de $a_0 = a(t_0)$ e $\rho_0 = \rho(t_0)$, onde t_0 representa hoje.

   (a) Universo dominado por matéria não relativística, $w = 0$.

   (b) Universo dominado por radiação, $w = 1/3$.

   (c) Universo dominado por energia escura, $w = -1$.

4. Considere o universo fechado de Friedmann, com métrica

$$d\tau^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 \right),$$

onde, como você encontrou no exercício acima, t e $a(t)$ são parametrizados por $t = \frac{B}{2}(\psi - \operatorname{sen}\psi)$ e $a(t) = \frac{B}{2}(1 - \cos\psi)$ e B é uma constante positiva.

(a) Qual é o tempo de vida total deste universo (medido por um observador dentro dele)?

(b) Sabemos que a métrica acima corresponde a seções espaciais ($t = cte$) dadas por 3-esferas com raio $a(t)$. Um fóton é emitido da origem no instante do Big Bang. Quanto tempo demora para esse fóton dar a volta no universo e voltar ao ponto inicial? Interprete.

5. (Schutz) Mostre que a relação entre velocidade e *redshift* cosmológico para um objeto suficientemente próximo é aproximadamente linear, $z = v/c$, como esperaríamos para um objeto com uma velocidade recessiva v.

6. **Espaço de de Sitter** Como vimos em aula, o espaço de de Sitter corresponde ao espaço-tempo com curvatura constante e positiva (pela nossa escolha de convenções) e é solução das equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica. Esse espaço-tempo é importante observacionalmente porque aproxima a fase inflacionária (com constante cosmológica muito grande) e o futuro do universo (com constante cosmológica muito pequena), de acordo com modelos com energia escura. Consideremos o espaço de de Sitter n-dimensional, dS_n. Considere o espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ de dimensão $n+1$ e métrica $ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$ (note a escolha de assinatura que estamos fazendo). Definamos uma hipersuperfície n dimensional em $\mathbb{R}^{1,n}$ por $-(x^0)^2 + (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = \ell^2$ e métrica induzida pela métrica ds^2 acima. O espaço dS_n corresponde a essa hipersuperfície dotada dessa métrica induzida (que denotaremos ainda por ds^2).

(a) Esboce dS_2 dentro de $\mathbb{R}^{2,1}$. O que muda para $\mathbb{R}^{n,1}$ em geral?

(b) Considere $\mathbb{R}^n$ com coordenadas cartesianas usuais $(z^1, \ldots, z^n)$. Parametrize a esfera unitária S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$ por coordenadas apropriadas $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Obtenha a expressão explícita da métrica de S^{n-1}, $d\Omega_{n-1}^2 = (dz^1)^2 + \cdots + (dz^n)^2$, em termos de $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ para $n = 2$, 3 e 4. Generalize para n qualquer.

(c) Definimos coordenadas globais em dS_n pela parametrização

$$x^0 = \ell \sinh(t/\ell), \qquad x^i = \ell \cosh(t/\ell) z^i,$$

onde $z^i = z^i(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ parametriza a esfera S^{n-1}, como no item anterior. Escreva essas expressões explicitamente em termos de $(t, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ para os casos $n = 2$, 3 e 4. Interprete essas coordenadas em termos de seu esboço no item (a).

(d) Com a notação dos itens anteriores, mostre que

$$ds^2 = -dt^2 + \ell^2 \cosh^2(t/\ell) d\Omega_{n-1}^2.$$

(e) Calcule todas as componentes do tensor de Riemann nessas coordenadas e mostre que

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\ell^2} \left(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} \right).$$

Compare com o exercício 1 da lista 4.

(f) Mostre que $R_{\mu\nu} = \frac{n-1}{\ell^2} g_{\mu\nu}$ e $R = \frac{n(n-1)}{\ell^2}$. Releia o enunciado.

(g) Mostre que de fato essa métrica é solução das equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica, isto é, mostre que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0,$$

com

$$\Lambda = \frac{(n-1)(n-2)}{\ell^2}.$$

(h) Existem muitas escolhas úteis de coordenadas no espaço de de Sitter. Uma dessas escolhas é dada pelas coordenadas estáticas, que correspondem a parametrizar dS_n por

$$x^0 = \sqrt{\ell^2 - r^2} \sinh(t/\ell), \quad x^1 = \sqrt{\ell^2 - r^2} \cosh(t/\ell), \quad x^i = r y^i,$$

para $i = 2, \ldots, n$, onde agora y^i parametriza S^{n-2} dentro de $\mathbb{R}^{n-1}$ (analogamente ao que z^i fazia com S^{n-1} nos itens acima), e $0 < r < \ell$. Mostre que, nestas coordenadas,

$$ds^2 = -(1 - r^2/\ell^2) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r^2/\ell^2} + r^2 d\Omega_{n-2}^2.$$

Esse sistema de coordenadas cobre todo o espaço de de Sitter?